0071523

प्रश्न पुस्तिका क्रमांक
Question Booklet Serial No. 774-

INTERMEDIATE SENT-UP EXAMINATION - 2026

इन्टरमीडिएट उत्प्रेषण परीक्षा - 2026

A

प्रश्न पुस्तिका सेट कोड
Question Booklet Set Code

MATHEMATICS (Elective)

गणित (ऐच्छिक)

I. Sc. & I. A.

विषय कोड :
Subject Code : 121/327

कुल प्रश्न : 100 + 30 + 8 = 138
Total Questions : 100 + 30 + 8 = 138

कुल मुद्रित पृष्ठ : 32
Total Printed Pages : 32

(समय : 3 घंटे 15 मिनट)
[Time : 3 Hours 15 Minutes]

(पूर्णांक : 100)
[Full Marks : 100]

परीक्षार्थियों के लिये निर्देश :

1. *परीक्षार्थी OMR उत्तर-पत्रक पर अपना प्रश्न पुस्तिका क्रमांक (10 अंकों का) अवश्य लिखें।*
2. *परीक्षार्थी यथासंभव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।*
3. *दाहिनी और हाशिये पर दिये हुए अंक पूर्णांक निर्दिष्ट करते हैं।*
4. *प्रश्नों को ध्यानपूर्वक पढ़ने के लिए परीक्षार्थियों को 15 मिनट का अतिरिक्त समय दिया गया है।*
5. *यह प्रश्न पुस्तिका दो खण्डों में है— **खण्ड-अ** एवं **खण्ड-ब**।*

Instructions for the candidates :

1. ***Candidate must enter his / her Question Booklet Serial No. (10 Digits) in the OMR Answer Sheet.***
2. *Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.*
3. *Figures in the right hand margin indicate full marks.*
4. *15 minutes of extra time have been allotted for the candidates to read the questions carefully.*
5. *This question booklet is divided into two sections — **Section-A** and **Section-B**.*

A

खण्ड - ब / SECTION - B

लघु उत्तरीय प्रश्न / Short Answer Type Questions

प्रश्न संख्या 1 से 30 तक लघु उत्तरीय हैं। इनमें से किन्हीं 15 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक प्रश्न के लिए 2 अंक निर्धारित है। $15 \times 2 = 30$

Question Nos. 1 to 30 are Short Answer Type. Answer any 15 questions. Each question carries 2 marks. $15 \times 2 = 30$

1. सिद्ध करें कि $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

   Prove that $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

2. सिद्ध करें कि $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}\frac{12}{13} = \sin^{-1}\frac{16}{65}$.

   Prove that $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}\frac{12}{13} = \sin^{-1}\frac{16}{65}$.

3. सिद्ध करें कि $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1} x = x$.

   Prove that $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1} x = x$.

4. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करें।

   Find the value of the determinant $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix}$.

5. सिद्ध करें कि $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

   Prove that $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

6. x और y के मान ज्ञात करें जबकि $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{vmatrix} = 4$ तथा $\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2}$.

   Find the values of x and y, when $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{vmatrix} = 4$ and $\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2}$.

वक्र $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ पर, उन बिन्दुओं को ज्ञात करें जिन पर की स्पर्श रेखाएँ x अक्ष के समांतर हैं।

Find the points on the curve $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ where the tangents are parallel to the x axis.

8. $\frac{dy}{dx}$ निकालें जब $x = a\cos^2\theta$, $y = a\sin^2\theta$.

Find $\frac{dy}{dx}$ when $x = a\cos^2\theta$, $y = a\sin^2\theta$.

9. $\frac{dy}{dx}$ निकालें जब $y = \sin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Find $\frac{dy}{dx}$, when $y = \sin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

10. $\frac{dy}{dx}$ निकालें जब $x^y = y^x$.

Find $\frac{dy}{dx}$ when $x^y = y^x$.

11. निम्न में x का मान ज्ञात करें :

$$\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Find the value of x from the following :

$$\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

12. निम्नांकित आव्यूह के व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करें :

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Find the inverse matrix of the following matrix :

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

13. समाकलन करें : $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

Integrate : $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

14. समाकलन करें : $\int \tan^2 x\,dx$.

Integrate : $\int \tan^2 x\,dx$.

15. समाकलन करें : $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Integrate : $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

16. समाकलन करें : $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$.

Integrate : $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$.

17. $\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ का मान ज्ञात करें।

Find the value of $\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

18. $\int_1^{\sqrt{e}} x\log x\,dx$ का मान ज्ञात करें।

Find the value of $\int_1^{\sqrt{e}} x\log x\,dx$.

19. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}}dx$ का मान ज्ञात करें।

Find the value of $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}}dx$.

20. हल करें : $\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x-5y$.

Solve : $\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x-5y$.

21. हल करें : $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=1$.

Solve : $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=1$.

22. सिद्ध करें कि $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=0$.

Prove that $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=0$.

23. यदि $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ और $\vec{b}=-7\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k}$ तो $\vec{a}\times\vec{b}$ का मान ज्ञात करें।

If $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ and $\vec{b}=-7\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k}$ then find the value of $\vec{a}\times\vec{b}$.

24. बिन्दु (3, 4, – 2) और (5, 6, – 3) को मिलाने वाली रेखा पर सदिश $2\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$ का प्रक्षेप निकालें।

Find the projection of the vector $2\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$ on the line joining the points (3, 4, – 2) and (5, 6, – 3).

25. यदि $P(A\cup B)=\frac{17}{30}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ तथा $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ तो दिखाएँ कि घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र नहीं हैं।

If $P(A\cup B)=\frac{17}{30}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ and $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$, then show that the events A and B are not independent.

26. एक पासा के फेंकने में यदि केवल सम संख्या आती हो, तो उसके 2 से अधिक होने की क्या प्रायिकता है ?

What is the probability of the occurrence of a number greater than 2 if it is known that only even numbers occur in throwing a die ?

27. अधिकतमीकरण करें $Z = 0 \cdot 7x + y$

जबकि $4x + 6y \leq 240$

$x \geq 0, y \geq 0$

Maximize $Z = 0 \cdot 7x + y$

subject to $4x + 6y \leq 240$

$x \geq 0, y \geq 0$

28. तलों $x - 2y + 2z = 6$ और $3x - 6y + 6z = 2$ के बीच की दूरी ज्ञात करें।

Find the distance between the planes $x - 2y + 2z = 6$ and $3x - 6y + 6z = 2$.

29. p के मान ज्ञात करें जिससे कि सरल रेखाएँ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+17}{p}$ और $\frac{x+4}{2} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-1}{2}$ परस्पर लम्ब हों।

Find the value of p so that the straight lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+17}{p}$ and $\frac{x+4}{2} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-1}{2}$ are perpendicular to each other.

30. यदि $f : R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = 2x + 7$ जहाँ $x \in R$ तो $f^{-1} : R \to R$ परिभाषित करें एवं $f^{-1}(3)$ का मान ज्ञात करें।

If $f : R \to R$ is defined by $f(x) = 2x + 7$ where $x \in R$ then define $f^{-1} : R \to R$ and find the value of $f^{-1}(3)$.

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न / Long Answer Type Questions

प्रश्न संख्या 31 से 38 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न है। इनमें से किन्हीं 4 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित है। $4 \times 5 = 20$

Question Nos. 31 to 38 are Long Answer Type questions. Answer any 4 questions. Each question carries 5 marks. $4 \times 5 = 20$

31. सिद्ध करें कि $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$.

Prove that $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$.

32. यदि $u = \cot^{-1}\sqrt{\cos 2\theta} - \tan^{-1}\sqrt{\cos 2\theta}$ तो सिद्ध करें कि $\sin u = \tan^2\theta$.

If $u = \cot^{-1}\sqrt{\cos 2\theta} - \tan^{-1}\sqrt{\cos 2\theta}$ then prove that $\sin u = \tan^2\theta$.

33. सिद्ध करें कि $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$.

Prove that $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$.

34. हल करें : $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$.

Solve : $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$.

35. $\frac{dy}{dx}$ निकालें, जब $x^3y^2 = (x+y)^5$.

Find $\frac{dy}{dx}$, when $x^3y^2 = (x+y)^5$.

36. किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ तथा $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ हैं तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

The diagonals of a parallelogram are $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ and $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ then find its area.

37. न्यूनतमीकरण करें : $Z = x + 2y$

जबकि $2x + y \geq 3$

$x + 2y \geq 6$

$x \geq 0, y \geq 0$

Minimize : $Z = x + 2y$

subject to $2x + y \geq 3$

$x + 2y \geq 6$

$x \geq 0, y \geq 0$

38. एक आदमी दो पासों को फेंकता है। 6 फेंक में 4 बार दोनों पर अंक 1 आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

A man throws two dice. Find the probability of getting four times exactly digit 1 on both the dice in 6 trials.

सिद्ध हुआ।

प्रश्न 2. सिद्ध करें कि

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}\frac{12}{13} = \sin^{-1}\frac{16}{65}$$

हल:

माना,

$$A = \sin^{-1}\frac{3}{5}, \quad B = \cos^{-1}\frac{12}{13}$$

तब,

$$\sin A = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{4}{5}$$

और

$$\cos B = \frac{12}{13}, \quad \sin B = \frac{5}{13}$$

अब,

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{13}$$

$$= \frac{36 - 20}{65} = \frac{16}{65}$$

अतः,

$$\boxed{A - B = \sin^{-1}\frac{16}{65}}$$

सिद्ध हुआ।

प्रश्न 3. सिद्ध करें कि

$$\sin\left(\cot^{-1}(\tan(\cos^{-1}x))\right) = x$$

हल:

माना,

$$\theta = \cos^{-1}x$$

तब,

$$\cos\theta = x$$

दिया गया व्यंजक,

$$= \sin(\cot^{-1}(\tan\theta))$$

चूँकि,

$$\cot^{-1}(\tan\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

अतः,

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \cos\theta = x$$

सिद्ध हुआ।

यह हल $0 \leq x \leq 1$ के लिए है।

प्रश्न 4. सारणिक का मान ज्ञात करें।

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix}$$

हल:

प्रथम पंक्ति से प्रसार करने पर,

$$= 2(8 \times 86 - 75 \times 9)$$

$$-7(3 \times 86 - 75 \times 5)$$

$$+65(3 \times 9 - 8 \times 5)$$

$$= 2(688 - 675) - 7(258 - 375) + 65(27 - 40)$$

$$= 26 + 819 - 845$$

$$\boxed{\Delta = 0}$$

प्रश्न 5. सिद्ध करें कि

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

हल:

माना,

$$S = a + b + c$$

तब सारणिक को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a - S & 2a & 2a \\ 2b & 2b - S & 2b \\ 2c & 2c & 2c - S \end{vmatrix}$$

सारणिक के स्तंभों के गुणों का प्रयोग करने पर,

$$\Delta = -S^3 \left(1 - \frac{2(a+b+c)}{S}\right)$$

$$= -S^3(1 - 2)$$

$$= S^3$$

अतः,

$$\boxed{\Delta = (a+b+c)^3}$$

सिद्ध हुआ।

प्रश्न 6. x और y का मान ज्ञात करें।

दिया है,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{vmatrix} = 4$$

तथा,

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2}$$

हल:

प्रथम सारणिक से,

$$2x - 3y = 4 \qquad ...(1)$$

द्वितीय सारणिक से,

$$x - 2y = \frac{7}{2} \qquad ...(2)$$

समीकरण (2) से,

$$x = \frac{7}{2} + 2y$$

समीकरण (1) में रखने पर,

$$2(\frac{7}{2} + 2y) - 3y = 4$$

$$7 + 4y - 3y = 4$$

$$y = -3$$

अब,

$$x = \frac{7}{2} - 6$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{x = -\frac{5}{2}, \quad y = -3}$$

प्रश्न 7. वक्र $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात करें जहाँ स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समानांतर हैं।

हल:

दिया है,

$$y = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1$$

स्पर्श रेखा x-अक्ष के समानांतर होने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(3x - 1)(x - 1) = 0$$

अतः,

$$x = \frac{1}{3}, \quad x = 1$$

जब $x = 1$,

$$y = 1 - 2 + 1 - 2 = -2$$

जब $x = \frac{1}{3}$,

$$y = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - 2$$

$$y = -\frac{50}{27}$$

अतः आवश्यक बिंदु हैं:

$$\boxed{(1, -2), \quad (\frac{1}{3}, -\frac{50}{27})}$$

प्रश्न 8. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें, जब

$$x = a\cos^2\theta, \quad y = a\sin^2\theta$$

हल:

$$\frac{dx}{d\theta} = -2a\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2a\sin\theta\cos\theta$$

अब,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$= \frac{2a\sin\theta\cos\theta}{-2a\sin\theta\cos\theta}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -1}$$

प्रश्न 9. अवकलज ज्ञात करें, जब

$$y = \sin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

हल:

माना,

$$u = \frac{1+x}{1-x}$$

तब,

$$y = \sin u$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos u\frac{du}{dx}$$

भागफल नियम से,

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2}$$

अतः,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(1-x)^2}\cos\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

प्रश्न 10. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें, जब

$$x^y = y^x$$

हल:

दोनों पक्षों में लघुगणक लेने पर,

$$y \log x = x \log y$$

अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} \log x + \frac{y}{x} = \log y + \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} \left(\log x - \frac{x}{y} \right) = \log y - \frac{y}{x}$$

अतः,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\log y - \frac{y}{x}}{\log x - \frac{x}{y}}}$$

प्रश्न 11 से 20

प्रश्न 11. निम्नलिखित से x का मान ज्ञात करें।

$$\begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

हल:

समान आव्यूहों के संगत अवयव बराबर होंगे।

$$y = -2$$

और,

$$2x - y = 6$$

$$2x + 2 = 6$$

$$2x = 4$$

$$\boxed{x = 2}$$

प्रश्न 12. निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात करें।

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

हल:

$$|A| = (-1)(3) - (-5)(-2)$$

$$= -3 - 10 = -13$$

व्युत्क्रम का सूत्र,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

अतः,

$$A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}}$$

प्रश्न 13. समाकलन करें।

$$I = \int \frac{dx}{1 - \sin x}$$

हल:

अंश और हर में $1 + \sin x$ से गुणा करने पर,

$$I = \int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx$$

$$\boxed{I = \tan x + \sec x + C}$$

प्रश्न 14. समाकलन करें।

$$I = \int \tan^2 x \, dx$$

हल:

हम जानते हैं,

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

अतः,

$$I = \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$\boxed{I = \tan x - x + C}$$

प्रश्न 15. समाकलन करें।

$$I = \int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

हल:

माना,

$$u = \sin^{-1} x$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

तब,

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

और,

$$v = -\sqrt{1 - x^2}$$

भागों द्वारा समाकलन करने पर,

$$I = uv - \int v \, du$$

$$= -\sin^{-1} x \sqrt{1 - x^2} + \int dx$$

अतः,

$$\boxed{I = x - \sqrt{1 - x^2} \sin^{-1} x + C}$$

प्रश्न 16. समाकलन करें।

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 8x + 20}$$

हल:

$$I = \int \frac{dx}{(x+4)^2 + 4}$$

मानक सूत्र से,

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

अतः,

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x+4}{2} + C}$$

प्रश्न 17. मान ज्ञात करें।

$$I = \int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

हल:

माना,

$$a^2 - x^2 = t$$

$$-2x\,dx = dt$$

सीमाएँ बदलने पर,

जब $x = 0,\ t = a^2$

जब $x = a,\ t = 0$

अतः,

$$I = -\frac{1}{2} \int_{a^2}^{0} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{a^2} t^{-1/2} dt$$

$$= [\sqrt{t}]_0^{a^2}$$

$$\boxed{I = a}$$

$$I = \int_1^{\sqrt{e}} x \log x \, dx$$

हल:

भागों द्वारा समाकलन करने पर,

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$$

अतः,

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \left(\frac{e}{4} - \frac{e}{4} \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \right)$$

$$\boxed{I = \frac{1}{4}}$$

प्रश्न 19. मान ज्ञात करें।

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}} dx$$

हल:

हम जानते हैं,

$$\sqrt{\tan x} = \frac{1}{\sqrt{\cot x}}$$

अतः,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cot x}{1 + \cot x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

सममिति के आधार पर,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

दोनों समीकरण जोड़ने पर,

$$2I = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx$$

$$2I = \frac{\pi}{2}$$

अतः,

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

प्रश्न 20. हल करें।

$$\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x - 5y$$

हल:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x-5y}$$

$$e^{5y}dy = e^{3x}dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int e^{5y}dy = \int e^{3x}dx$$

$$\frac{e^{5y}}{5} = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

अतः,

$$\boxed{3e^{5y} - 5e^{3x} = C}$$

प्रश्न 21 से 30

प्रश्न 21. हल करें।

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$$

हल:

दिया गया समीकरण,

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$$

हम जानते हैं,

$$\frac{d}{dx}[(1+x^2)y] = (1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy$$

अतः,

$$\frac{d}{dx}[(1+x^2)y] = 1$$

समाकलन करने पर,

$$(1+x^2)y = x + C$$

अतः,

$$\boxed{y = \frac{x+C}{1+x^2}}$$

प्रश्न 22. सिद्ध करें कि

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

हल:

सदिश गुणन के वितरण नियम से,

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$+ \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a}$$

$$+ \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$$

हम जानते हैं,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

इसी प्रकार,

$$\vec{a} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$$

अत: सभी पद आपस में कट जाएँगे।

$$\boxed{0 = 0}$$

सिद्ध हुआ।

प्रश्न 23. यदि

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

और

$$\vec{b} = -7\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$$

तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान ज्ञात करें।

हल:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -5 \\ -7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

प्रसार करने पर,

$$= \hat{i}(-24 + 30) - \hat{j}(16 - 35) + \hat{k}(12 - 21)$$

$$= 6\hat{i} + 19\hat{j} - 9\hat{k}$$

अत:,

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = 6\hat{i} + 19\hat{j} - 9\hat{k}}$$

प्रश्न 24. बिंदुओं (3, 4, -2) और (5, 6, -3) को मिलाने वाली रेखा पर सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$ का प्रक्षेप निकालें।

हल:

दिए गए बिंदु हैं,

$$A = (3, 4, -2)$$

$$B = (5, 6, -3)$$

रेखा की दिशा में सदिश,

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$$

$$= (5 - 3)\hat{i} + (6 - 4)\hat{j} + (-3 + 2)\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

दिया गया सदिश,

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$$

अब,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(2) - 3(2) - 6(-1)$$

$$= 4 - 6 + 6 = 4$$

और,

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

अत: अदिश प्रक्षेप,

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\boxed{\frac{4}{3}}$$

सदिश प्रक्षेप,

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

$$= \frac{4}{9}(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$\boxed{\frac{8}{9}\hat{i} + \frac{8}{9}\hat{j} - \frac{4}{9}\hat{k}}$$

प्रश्न 25. यदि

$$P(A \cup B) = \frac{17}{30}$$

$$P(B) = \frac{2}{5}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

तो दिखाएँ कि घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र नहीं हैं।

हल:

हम जानते हैं,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

मान रखने पर,

$$\frac{17}{30} = P(A) + \frac{2}{5} - \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \frac{17}{30} - \frac{12}{30} + \frac{5}{30}$$

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

अब,

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{15}$$

लेकिन,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

चूँकि,

$$\frac{2}{15} \neq \frac{1}{6}$$

अत:,

$$\boxed{P(A \cap B) \neq P(A)P(B)}$$

इसलिए घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र नहीं हैं।

प्रश्न 26. एक पासा फेंकने पर यदि केवल सम संख्या आती है, तो उसके 2 से अधिक होने की प्रायिकता क्या है?

हल:

सम संख्याओं का समुच्चय,

$$S = \{2, 4, 6\}$$

कुल संभावित परिणाम = 3

2 से अधिक सम संख्याएँ,

$$A = \{4, 6\}$$

अनुकूल परिणाम = 2

प्रायिकता,

$$P(A) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{2}{3}}$$

प्रश्न 27. अधिकतमीकरण करें।

$$Z = 0.7x + y$$

जबकि,

$$4x + 6y \leq 240$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

हल:

सीमाओं का समीकरण,

$$4x + 6y = 240$$

जब $y = 0$,

$$4x = 240 \Rightarrow x = 60$$

जब $x = 0$,

$$6y = 240 \Rightarrow y = 40$$

अत: कोने के बिंदु हैं:

$$(0, 0), \quad (60, 0), \quad (0, 40)$$

अब उद्देश्य फलन $Z = 0.7x + y$ का मान निकालते हैं।

कोने के बिंदु	Z का मान
(0, 0)	0
(60, 0)	42
(0, 40)	40

अत: अधिकतम मान,

$$\boxed{Z_{\max} = 42}$$

जब,

$$\boxed{x = 60, \quad y = 0}$$

प्रश्न 28. तलों के बीच की दूरी ज्ञात करें।

$$x - 2y + 2z = 6$$

और

$$3x - 6y + 6z = 2$$

हल:

दूसरे तल को 3 से भाग देने पर,

$$x - 2y + 2z = \frac{2}{3}$$

दोनों तल समानांतर हैं।

समानांतर तलों के बीच दूरी का सूत्र,

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

मान रखने पर,

$$d = \frac{|6 - \frac{2}{3}|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$= \frac{\frac{16}{3}}{3}$$

अतः,

$$\boxed{d = \frac{16}{9} \text{ इकाई}}$$

प्रश्न 29. p का मान ज्ञात करें जिससे दोनों रेखाएँ परस्पर लंबवत हों।

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+17}{p}$$

तथा,

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-1}{2}$$

हल:

प्रथम रेखा के दिशा अनुपात हैं,

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + p\hat{k}$$

द्वितीय रेखा के दिशा अनुपात हैं,

$$\vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

दोनों रेखाएँ लंबवत होने पर,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2(2) + 3(2) + p(2) = 0$$

$$4 + 6 + 2p = 0$$

$$2p = -10$$

अतः,

$$\boxed{p = -5}$$

प्रश्न 30. यदि

$$f : R \to R$$

इस प्रकार परिभाषित है कि,

$$f(x) = 2x + 7$$

तो $f^{-1} : R \to R$ परिभाषित करें एवं $f^{-1}(3)$ का मान ज्ञात करें।

हल:

दिया है,

$$y = 2x + 7$$

x के लिए हल करने पर,

$$2x = y - 7$$

$$x = \frac{y - 7}{2}$$

अत: प्रतिलोम फलन,

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x - 7}{2}}$$

अब,

$$f^{-1}(3) = \frac{3 - 7}{2}$$

$$= \frac{-4}{2}$$

$$\boxed{f^{-1}(3) = -2}$$

खंड – C : दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (5 अंक)

प्रश्न 31 से 38

प्रश्न 31. सिद्ध करें कि

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

हल:

दिया गया सारणिक,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति से प्रसार करने पर,

$$\Delta = a(ab^3 - c^3a) - b(a^2b - c^2bc) + c(a^3c - b^2bc)$$

सरलीकरण करने पर,

$$\Delta = a^2b^3 - ac^3 - ba^2b + bc^3 + a^3c - b^3c$$

समान पदों को व्यवस्थित करके गुणनखंड करने पर,

$$\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

अतः,

$$\boxed{\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)}$$

सिद्ध हुआ।

प्रश्न 32. यदि

$$u = \cot^{-1}\sqrt{\cos 2\theta} - \tan^{-1}\sqrt{\cos 2\theta}$$

तो सिद्ध करें कि,

$$\sin u = \tan^2\theta$$

हल:

माना,

$$\alpha = \cot^{-1}\sqrt{\cos 2\theta}$$

और,

$$\beta = \tan^{-1}\sqrt{\cos 2\theta}$$

तब,

$$u = \alpha - \beta$$

माना,

$$t = \sqrt{\cos 2\theta}$$

अब,

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

तथा,

$$\sin \beta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

हम जानते हैं,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

चूँकि $t^2 = \cos 2\theta$,

$$\sin u = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

त्रिकोणमितीय सूत्र से,

$$= \frac{2\sin^2 \theta}{2\cos^2 \theta}$$

अतः,

$$\boxed{\sin u = \tan^2 \theta}$$

सिद्ध हुआ।

प्रश्न 33. सिद्ध करें कि

$$\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$$

हल:

माना,

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$$

अब $x = \frac{\pi}{4} - t$ रखने पर,

$$I = \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt$$

हम जानते हैं,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \frac{1-\tan t}{1+\tan t}$$

अतः,

$$I = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt$$

$$I = \int_0^{\pi/4} [\log 2 - \log(1+\tan t)]dt$$

$$I = \frac{\pi}{4}\log 2 - I$$

$$2I = \frac{\pi}{4}\log 2$$

अतः,

$$\boxed{I = \frac{\pi}{8}\log 2}$$

सिद्ध हुआ।

प्रश्न 34. हल करें।

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

हल:

दिया गया समीकरण,

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

दोनों पक्षों में $\cos^2 x$ से भाग देने पर,

$$\frac{dy}{dx} + y \sec^2 x = \tan x \sec^2 x$$

यह रैखिक अवकल समीकरण है।

तुलना करने पर,

$$P = \sec^2 x$$

समाकलन गुणक (I.F.),

$$= e^{\int P dx}$$

$$= e^{\int \sec^2 x \, dx}$$

$$= e^{\tan x}$$

अतः,

$$ye^{\tan x} = \int e^{\tan x} \tan x \sec^2 x \, dx$$

माना,

$$t = \tan x, \quad dt = \sec^2 x \, dx$$

तब,

$$ye^t = \int te^t \, dt$$

भागों द्वारा समाकलन करने पर,

$$ye^t = e^t(t-1) + C$$

$$y = t - 1 + Ce^{-t}$$

अतः,

$$\boxed{y = \tan x - 1 + Ce^{-\tan x}}$$

प्रश्न 35. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें, जब

$$x^3y^2 = (x+y)^5$$

हल:

दिया है,

$$x^3y^2 = (x+y)^5$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$3x^2y^2 + 2x^3y\frac{dy}{dx}$$

$$= 5(x+y)^4\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

पदों को व्यवस्थित करने पर,

$$2x^3y\frac{dy}{dx} - 5(x+y)^4\frac{dy}{dx}$$

$$= 5(x+y)^4 - 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}[2x^3y - 5(x+y)^4] = 5(x+y)^4 - 3x^2y^2$$

अत:,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{5(x+y)^4 - 3x^2y^2}{2x^3y - 5(x+y)^4}}$$

प्रश्न 36. किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण

$$\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

तथा,

$$\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

हैं तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल:

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल,

$$A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

अब,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(4 - 6) - \hat{j}(12 + 2) + \hat{k}(-9 - 1)$$

$$= -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

अब,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 196 + 100}$$

$$= \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

अत: क्षेत्रफल,

$$A = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3}$$

$$\boxed{A = 5\sqrt{3} \text{ वर्ग इकाई}}$$

प्रश्न 37. न्यूनतमीकरण करें।

$$Z = x + 2y$$

जबकि,

$$2x + y \geq 3$$

$$x + 2y \geq 6$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

हल:

उद्देश्य फलन,

$$Z = x + 2y$$

प्रतिबंध,

$$2x + y \geq 3$$

$$x + 2y \geq 6$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

सीमा रेखाओं का प्रतिच्छेद ज्ञात करते हैं।

$$2x + y = 3 \quad ...(1)$$

$$x + 2y = 6 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) से,

$$y = 3 - 2x$$

समीकरण (2) में रखने पर,

$$x + 2(3 - 2x) = 6$$

$$x + 6 - 4x = 6$$

$$-3x = 0$$

$$x = 0, \quad y = 3$$

अब बिंदु $(0, 3)$ पर,

$$Z = 0 + 2(3) = 6$$

चूँकि उद्देश्य फलन स्वयं ही प्रतिबंध $x + 2y \geq 6$ के अनुसार 6 या उससे अधिक है और बिंदु $(0, 3)$ पर यह मान प्राप्त हो जाता है।

अत:,

$$\boxed{Z_{\min} = 6}$$

जब,

$$\boxed{x = 0, \quad y = 3}$$

प्रश्न 38. एक आदमी दो पासों को फेंकता है। 6 बार में दोनों पासों पर ठीक 4 बार अंक 1 आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल:

दोनों पासों पर एक साथ 1 आने की प्रायिकता,

$$p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$p = \frac{1}{36}$$

एक साथ 1 नहीं आने की प्रायिकता,

$$q = 1 - \frac{1}{36}$$

$$q = \frac{35}{36}$$

यह द्विपद वितरण का प्रश्न है।

प्रायिकता का सूत्र,

$$P(X = r) = {}^{n}C_{r} p^{r} q^{n-r}$$

यहाँ,

$$n = 6, \quad r = 4$$

अत:,

$$P(X = 4) = {}^{6}C_{4} \left(\frac{1}{36}\right)^{4} \left(\frac{35}{36}\right)^{2}$$

$$= 15 \times \frac{1}{36^{4}} \times \frac{1225}{36^{2}}$$

अत: अंतिम उत्तर,

$$\boxed{P(X = 4) = 15 \left(\frac{1}{36}\right)^{4} \left(\frac{35}{36}\right)^{2}}$$